J

Espaces préhilbertiens réels

Donnée : E est un $\mathbb{R}$-ev

I Géométrie d'un espace préhilbertien :

Déf : Un produit scalaire sur E est une application $\langle\, ,\rangle\ E^2 \to \mathbb{R}$ qui est bilinéaire ▷ symétrique : $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

▷ positive : $\forall x \in E\ \ \langle x,x\rangle \geq 0$

▷ définie ∀ : $\forall x \in E\setminus\{0\}\ \ \langle x,x\rangle \neq 0$

Ex 1) PS canonique sur $\mathbb{R}^n$ $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

2) sur $M_n(\mathbb{R})$ $\langle A,B\rangle = Tr({}^tAB) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} b_{ij}$

Si $O \in O_n(\mathbb{R})$, $\langle OB, OA\rangle = Tr({}^tA\,\underbrace{{}^tO\,O}_{I}\,B)$

$= Tr({}^tAB)$

3) I int de $\mathbb{R}$ $L^2_c(I) = \{ f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \mid \int_I f^2 < +\infty\}$

$\langle f, g\rangle = \int_I fg$ (correct $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2+g^2)$)

4) $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 < +\infty\}$, $\langle u \mid v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$

correct : $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$

Inégalité de Schwarz

Th : Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $(x,y) \in E^2$ on a $|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$ avec égalité ssi (x,y) liée.

D/ Supp. $y \neq 0$, on introduit $t \xrightarrow{\varphi} \langle x+ty, x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + t^2\langle y,y\rangle$

trinôme positif donc discriminant ≤ 0

$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

▷ Cas d'égalité : $\Delta = 0 \iff \exists t_0 \in \mathbb{R}\ \varphi(t_0) = 0$

$\iff x + t_0 y = 0$, OK.

RMI : On suppose $\langle , \rangle \geq 0$, mais pas forcément définie ; on prend $y \neq 0$, si $\langle y,y\rangle > 0$, OK
Si $\langle y, y\rangle = 0$ P est affine et positive donc cste $\langle x,y\rangle = 0$

Ex : $E = \{X \text{ VAD} : \Omega \to \mathbb{R},\ E(X) = 0,\ V(X) < +\infty\}$

forme bil sym

$\langle X, Y\rangle = E(XY)$, c'est une FBS positive, mais $\langle X,X\rangle = 0$
$\iff X = 0$ p.s

* Si X et Y sont indép $E(XY) = E(X)E(Y) = 0$

$$\underbrace{V(X_1 + \dots + X_n)}_{\text{indép}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{V(X_i)}_{\text{carré de la "norme"}}$$

Minkowski :

Th : Soit $(E, \langle , \rangle)$ ev préhilbertien. On note, pour $x \in E$ $\|x\|_2 = \langle x,x\rangle^{1/2}$
Alors $\forall (x,y) \in E^2$, $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$, avec égalité ssi $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$ pour $\lambda \geq 0$

D/ $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \iff 2\langle x,y\rangle \leq 2\|x\|_2\|y\|_2 \iff$ C.S
Cas d'égalité : On suppose SNG $y \neq 0$; il vient $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$
Et aussi : $\langle x,y\rangle = \|x\|_2 \|y\|_2$, soit $\lambda\langle y,y\rangle = |\lambda| \, \|y\|_2^2$ $\lambda \geq 0$

cf en math1. Ex : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ tq $\|x_1 + \dots + x_n\|_2 = \|x_1\|_2 + \dots + \|x_n\|_2$
Alors $x_1, \dots, x_n$ sont sur une même demi-droite d'origine 0

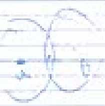
Ex : Trouver les pts extrémaux de $\bar{B}(0,1)$
S/ $E \neq \{0\}$ ① Soit $x \in B(0,1)$ ie $\|x\|_2 < 1$
• Si $x = 0$ on choisit $a \in S(0,1)$: $0 = \frac{1}{2}(a - a)$ ⎫ x n'est pas
•• Si $x \neq 0$, $x = \underbrace{\vec{0}}_{\text{vecteur}}(1 - \|x\|) + \|x\| \frac{x}{\|x\|}$ ⎭ extrémal

② Soit $x \in S(0,1)$, Si $x = (1-\lambda)y + \lambda z$, $\lambda \in]0,1[$, $\|y\| \leq 1$, $\|z\| \leq 1$
il vient $1 \leq (1-\lambda)\|y\| + \lambda\|z\| \leq (1-\lambda) + \lambda = 1$
$\Rightarrow \|y\| = \|z\| = 1$
puis $\|(1-\lambda)y + \lambda z\| = \|(1-\lambda)y\| + \|\lambda z\|$

égalité de Minko $z = \mu y, \mu \geq 0, \|z\| = \|y\| = 1 \longrightarrow z = y$

Egalité de la médiane : $\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

APPL : Soit $(a,b) \in E^2$, $r > 0$ avec $a \neq b$. A lors $\underbrace{\mathrm{diam}\left(\overline{B}(a,r) \cap \overline{B}(b,r)\right)}_{<2r}$



Si $\|a-b\| < 2r$ l'intersection est $\neq \emptyset$: $\frac{a+b}{2} \in \Gamma$

sinon ——— est $\emptyset$

Soit $x \in \Gamma$: $\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{1}{2}(x-a) + \frac{1}{2}(x-b)\right\|^2 = \frac{1}{4}\|u+v\|^2$

$\boxed{\begin{array}{l} u = x-a \\ v = x-b \end{array}}$

$$= \frac{1}{2}\left(\|x-a\|^2 + \|x-b\|^2 - \frac{1}{2}\|a-b\|^2\right)$$

$$< r^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\|a-b\|^2}_{>0}$$

<u>Ex</u> : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, on suppose $\forall (x,y) \in E^2$

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, Mq $\exists \langle \,,\, \rangle$ produit scalaire sur E^2

tq $\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

S/ On part de la polarisation $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2\right)$

sur $(E, \langle \,,\, \rangle)$ préhilbertien

On pose $\varphi(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ $\begin{cases} \varphi \text{ FBS} \\ \varphi(x,x) = 4\|x\|^2 \end{cases}$

On vérifie $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\varphi(x, y+z) - \varphi(x,z) = \frac{1}{2}\varphi(2x, y)$

$\varphi(x,y+z) - \varphi(x,z) = \frac{1}{2}\varphi(2x,y)$

On fait $z=0$ $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\varphi(2x,y) \to \forall x,y,z \in E^3$ $\varphi(x,y+z) = \varphi(x,y) + \varphi(x,z)$

À x fixé $y \mapsto f(x,y) \in Hom_c(E,\mathbb{R})$

On montre $\forall \lambda \in \mathbb{Q}$ $\varphi(x,\lambda y) = \lambda\varphi(x,y)$ | $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire, donc φ est bilinéaire

Par $\mathcal{C}^0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\varphi(x,\lambda y) = \lambda\varphi(x,y)$

et $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) = \|x\|^2$, φ est BSDP.

$(E, \|\cdot\|_2)$ → DF euclid

$(E, \|\cdot\|_2)$ → DI préhilbertien → polynômes orthogonaux

DI préhilbertien → Complets : hilbert

II Orthogonalité :

$(E, \langle | \rangle)$ est un espace préhilbertien

A) Généralités

Déf : Une famille $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ est dite orthogonale lorsque $\forall i \neq j \langle x_i, x_j\rangle$
et orthonormée si de plus $\forall i$ $\|x_i\| = 1$.

Premières propriétés :

1) Si (x_i) est orthogonale, pour toute partie finie $J \subset I$ et $\forall (\lambda_i) \in \mathbb{R}^J$
$\|\sum_{i\in J} \lambda_i x_i\|^2 = \sum_{i\in J} \lambda_i^2 \|x_i\|^2$

2) Si de plus $\forall i \in I$, $x_i \neq 0$, alors (x_i) est libre

⚠ Admettant que $\ell^2(\mathbb{N})$ n'est pas de dim dénombrable, mq ℓ^2 n'admet pas de BON

S/ Par l'absurde : 1) On va mq $\ell^2(\mathbb{N})$ est séparable ie contient une partie dén dense.

En effet : $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable ; soit $\underbrace{(a_0, \dots, a_n, \dots)}_{\text{finie (presque nulle)}} \in \mathbb{Q}[X]$

176

elle est nulle après, mettons pour $n \geq d+1$, $(a_0, \dots, a_d, 0, \dots 0) \in \ell^2$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, $\varepsilon > 0$, il existe N : $\sum_{N+1}^{+\infty} x_n^2 < \varepsilon^2$, puis $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{Q}^{N+1}$ tq $\sum_0^N |x_n - a_n| < \varepsilon^2$ d'où $\|x_n - a_n\|_2 = \sqrt{\sum_0^{+\infty}(x_n - a_n)^2} \leq \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \sqrt{2}\,\varepsilon$.

2) $\forall i \in I$ $\exists (a_n)_i \in \mathbb{Q}[X]$, $\|e_i - (a)(i)\| < \frac{1}{2}$ avec 1)

$\forall i \neq j$ $(a)_i \neq (a)_j$ (sinon $\|e_i - e_j\| < 1$, alors que $\|e_i - e_j\|^2 = 2$)

~~non dén (base de $\ell^2(\mathbb{N})$)~~

~~$\begin{pmatrix} I \to \mathbb{Q}[X] \\ i \to (a)_i \end{pmatrix}$ est surjective, absurde injective~~

B) Dimension finie.

Th : On suppose $(E, \langle , \rangle)$ est de dim finie. Alors $j \begin{pmatrix} E \to E^* \\ u \mapsto \langle u, \cdot \rangle \end{pmatrix}$ est un isomorphisme

D/ j est clairement linéaire, $\dim E = \dim E^*$, on regarde $\operatorname{Ker} j$
si $u \in \operatorname{Ker} j$, il vient $\langle u, u \rangle = 0$, donc $u = 0$

Cor : Si H est un hyperplan de E, il existe $u \in E$ tq

$\forall x \in E$, $x \in H \Leftrightarrow \langle u, x \rangle = 0$ (*) si v est un autre vecteur tq (*) : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $v = \lambda u$

D/ $H = \operatorname{Ker} \varphi$, $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$, avec le th $\exists! u \in E$ $\varphi = \langle u | \cdot \rangle$

Si v convient, $\operatorname{Ker} \langle v | \cdot \rangle = \operatorname{Ker} \langle u | \cdot \rangle = H \neq E$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$
$\langle v | \cdot \rangle = \lambda \langle u | \cdot \rangle = \langle \lambda u | \cdot \rangle$; j étant injective, $v = \lambda u$.

Voc : $\mathbb{R}u$ est la normale à H, $H^\perp = \mathbb{R}u$

Th : 1) E possède bases orthonormées
2) Si $(e_1, \dots, e_p)$ est un système orthonormé de E, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dont les p premiers sont $(e_1, \dots, e_p)$

I/ 1) Récurrence sur la dimension : Soit H un hyperplan de E (HR) H possède une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$, notons $H^\perp = \mathbb{R}u$
$e_n = \frac{u}{\|u\|}$ AQT.

2) Idem : si $p < n$, on introduit un hyperplan $H \supset Vect(e_1, \dots, e_p)$
$(e_1, \dots, e_p) \to (e_1, \dots, e_{n-1})$ B ON de H $\to (e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{u}{\|u\|})$

Procédé de Schmidt :
Th : Soit $(e_1, \dots e_n)$ une base de E
Il existe une de base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E tq
$\forall k \in [\![1, n]\!]$ $Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = Vect(e_1, \dots, e_k)$
Si $(\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_n')$ est une base vérifiant la même propriété, il existe des nombres $d_i \in \{-1, 1\}$ tq $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i' = d_i \varepsilon_i$

Lié à la propriété $\langle e_i, \varepsilon_i \rangle > 0$ la parallélisme

D/ Rec sur la dim $n = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ ou $\varepsilon_1 = -\frac{e_1}{\|e_1\|}$
$n \geq 2$ Soit $H = Vect(e_1, \dots, e_{n-1})$ d'où $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$

Notons $H = \mathbb{R}u$ | Nécessairement $\varepsilon_n \perp Vect(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}) = Vect(e_1, \dots, e_{n-1})$
$\Rightarrow \varepsilon_n \in \mathbb{R}u$

De là $\varepsilon_n = \frac{u}{\|u\|}$ ou $-\frac{u}{\|u\|}$

Comme $e_n \notin H$, il vient $\langle u, e_n \rangle \neq 0$, donc $\langle u, \varepsilon_n \rangle \neq 0$ donc $\langle u, \varepsilon_n \rangle \neq 0$, le choix du signe fixe ε_n

Expression matricielle : $e_j = a_{jj} \varepsilon_j + a_{j-1,j} \varepsilon_{j-1} + \dots + a_{1j} \varepsilon_1$ ($e_j \in Vect(e_1, \dots, e_j) = Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$)

$\langle e_j, \varepsilon_j \rangle = a_{jj} > 0$, $\|e_j\|^2 = a_{jj}^2 + a_{j-1}^2 + \dots + a_{1j}^2$

$$[(e)]_{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

X2002 Expression du PS et de la norme en base orthonormée :
$x = \sum x_i e_i$
$y = \sum y_i e_i$ $\longrightarrow$ $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1} \langle e_i | x \rangle^2$
$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1} x_i y_i$

RM : $E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme d'ev.
$x \longmapsto (\langle e_i | x\rangle)_{1\leq i\leq m}$

Exo : Soit $(E, \langle , \rangle)$ un ev, $(e_1, \dots, e_m) \in E$ tq $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle x | e_i\rangle^2$
$\dim E = n$

1) MQ $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m) = E$
2) Donner un ex avec $n=2, m=3$, $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\|$
3) On suppose $n = m$, MQ $(e_1, \dots, e_m)$ est une BON

I/ 1) Si $\text{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset H$ hyp ; posons $H^{\perp} = \mathbb{R}u$, $u \neq 0$, il vient

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle u, e_i\rangle^2 = 0, \text{ Absurde}$$

2) $(1, j, j^2)$ de $\mathbb{C}$, $x = (x_1, x_2)$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $e_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\sum_{i=1}^{3} \langle e_i, x\rangle^2 = x_1^2 + \left(-\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2 + \left(-\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2 = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, e_1, \sqrt{\frac{2}{3}}\, e_2, \sqrt{\frac{2}{3}}\, e_3\right)$ conviennent

3) $x = e_i$, $\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \langle e_i, e_k\rangle^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} \langle e_i, e_k\rangle^2$ (*)

$\hookrightarrow \|e_i\|^2 \geq \|e_i\|^4$

$\hookrightarrow \|e_i\| \leq 1$

de même pour $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_m$
par ex $i = 1$
Soit $u \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_m)^{\perp}$, avec $\|u\| = 1$; alors ~~$1 \leq \|e_1\|^2$ et $\|e_2\|^2 = 1$~~
il vient $1 = \|u\|^2 = \langle e_1 | u\rangle^2$ or $\langle e_1 | u\rangle^2 \underset{CS}{\leq} \|u\|^2 \|e_1\|^2 \leq \|e_1\|^2$

ainsi $\|e_1\|^2 \geq 1$ et $\|e_1\|^2 = 1$ par (*) on a l'orthogonalité

C) Orthogonal d'une partie (cas général)

Déf : $A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$

Prop : ① $A^{\perp} = \bigcap_{x \in A} \mathrm{Ker} \langle x, \cdot \rangle$ est un sev de E $\quad | \; \{0\}^{\perp} = E, E^{\perp} = \{0\}$

② $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$

③ $A \subset A^{\perp\perp}$ ④ $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$

Déf : On dit que F admet un supplémentaire orth s'il existe $G \subset F^{\perp}$ tq $F \oplus G = E$, ds ce cas $G = F^{\perp}$

(Si $x \in F^{\perp}$, $x = \underset{F}{y} + \underset{\in G}{z}$, d'où $\underset{\in F}{y} = x - z \in F^{\perp}$; $y = 0$)

Obs : Dans tous les cas, $F^{\perp}$ est fermé car $x \mapsto \langle x | y \rangle$ est $\mathcal{C}^0$

($C.S \; |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$)

D) Orthogonal d'un sev dim finie :

Th : Soit E un sev euclidien, et F un sev de E.

Alors $F \oplus F^{\perp} = E$

D/ $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ (usuel), soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F qu'on complète en $(e_1, \dots, e_m)$ BON de E. Soit $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \in E$, il vient $x \in F^{\perp} \underset{CL}{\Leftrightarrow} \langle e_i | x \rangle = 0, i = 1, \dots, p \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_p = 0$

(CC) $x \in F^{\perp} \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_m)$

Propriété : 1) $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$
2) $F^{\perp\perp} = F$; $F \subset F^{\perp\perp}$ et $\dim F = \dim F^{\perp\perp}$
3) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$; $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$, par bilinéarité du p.s et $F^{\perp} \supset (F+G)^{\perp}$, $G^{\perp} \supset (F+G)^{\perp}$
4) $(F \cap G)^{\perp} = (F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp})^{\perp} = (F^{\perp}+G^{\perp})^{\perp\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

E) Projecteurs orthogonaux $(E, \langle . \rangle)$ préhilbertien

Déf : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur orthogonal lorsque $p \circ p = p$ et $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$.

Propriétés Soit p un P.O

Ker Im
$F \oplus G = E$
$G \subset F^{\perp}$
donc $G = F$

1) $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont fermés
2) $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^{\perp}$, $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ $(\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} p^{\perp} = E)$
3) Si $p \neq 0$, $|||p||| = 1$

D/ 3) ⇒ 1) Car p est $\mathcal{C}^0$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(I - p)$ → image réciproque par fct $\mathcal{C}^0$
2) On a $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = E$ et $\operatorname{Im} p \subset (\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ donc $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^{\perp}$
3) Soit $x \in E$; $x = y + z$, $(y, z) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$

$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|p(x)\|^2$

$|||p||| \geq \dfrac{\|p(x)\|}{\|x\|} = 1$ ✓

$|||p||| \leq 1$
si $x \in \operatorname{Im} p \setminus \{0\}$
$\|p(x)\| = \|x\|$
ok

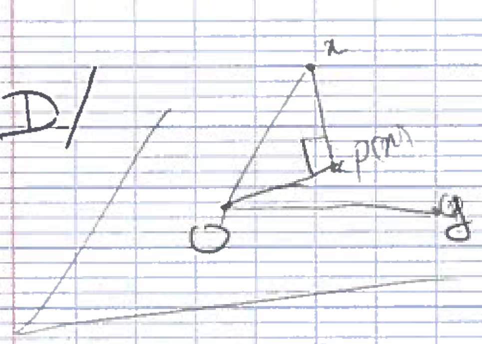
Th Soit F un sev de E ⇔ F possède un supplémentaire orthogonal
il existe un P.O d'image F.

D/ ⇑ Si $F = \operatorname{Im} p$, p PO $\mid F \oplus F^{\perp} = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = E$ ...

⇓ On note p la projection de E sur $F // F^{\perp}$.

Prop I : (→ inégalité de Bessel) Soit F un sev de E image d'un P.O p, alors $\forall x \in E$ $d(x, F) = \|x - p(x)\|_2$ ($d(x, F)$ atteinte en $p(x)$ seulement).

D/



Soit $y \in F = \mathrm{Im}\, p$, écrivons
$$\underbrace{x-p(x)}_{\in \ker p = F^\perp} + \underbrace{p(x)-y}_{F}$$
$x - y = x - p(x) + p(x) - y$

$$\|x-y\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-y\|^2 \Rightarrow \inf \|x-y\| = \|x-p(x)\|$$
atteint en $p(x)$.

Th : Soit F un sev de E de dim finie, Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base orthonormée de F

1) $\pi : E \to F$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{d} \langle e_i | x \rangle e_i$ est un P.O de E sur F et donc $E = F \oplus F^\perp$

Th de Pythagore → Retenir cette forme de calcul

2) Pour tout $x \in E$, $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{d} \langle e_i , x \rangle^2$ $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{d} \langle e_i | x \rangle^2$

D/ 1) i) π est linéaire et $\mathrm{Im}\,\pi \subset F$ linéarité

ii) On veut $\forall x \in F$, $\pi(x) = x$ (?), par linéarité on se ramène à $x = e_k$: $\pi(e_k) = \sum_{i=1} \langle e_i , e_k \rangle e_i = e_k$ OK.

iii) Soit $x \in \ker \pi$, On veut $x \perp F$ (?) pour cela, il suffit de vérifier que $\langle x | e_k \rangle = 0$, $k = 1 \dots d$; or $0 = \pi(x) = \sum_{k=1}^{d} \langle e_k , x \rangle e_k$ comme e_k est libre $\langle e_k | x \rangle = 0$, $k = 1 \dots d$.

2) $\|x\|^2 = \underbrace{\|x - \pi(x)\|^2}_{d(x,F)^2} + \|\pi(x)\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \sum_{i=1}^{d} \langle e_i , x \rangle^2$

Important → Conseil

Exo : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p$

Mq p est orthogonal $\Leftrightarrow$ p est $\mathcal{C}^0$ et $|||p||| \leq 1$

D/ ($\Downarrow$) Vu ($\Uparrow$) On veut $\langle x , y \rangle = 0$ (?), pour cela, on ~~[illegible]~~ écrit $\|p(x+ty)\|^2 \leq \|x+ty\|^2$

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 + 2t\langle x,y \rangle + t^2 \|y\|^2$$

$t > 0$ on divise par t : $2\langle x,y \rangle + t\|y\|^2 \geq 0$, $t \to 0^+ \Rightarrow \langle x,y \rangle \geq 0$

$t < 0$ $2\langle x,y \rangle + t\|y\|^2 \leq 0$ $t \to 0$ $\langle x,y \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle x,y \rangle = 0$

OK

à l'endroit à l'x → **Ex:** Soit $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux P.O Mq $p \circ q$ est un P.O ssi $p \circ q = q \circ p$

S/ $(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q$

$|||p \circ q||| \leq |||p||| \, |||q||| \leq 1$ donc $p \circ q$ orthogonal.

Pommellet : l'examinateur le pose et

il est tout content de lui habile...